10) R. Jackiw and C. Rebbi, Phys. Rev. Lett. **37** (1976) 172.

11) A. A. Belavin, A. M. Polyakov, A. S. Schwartz and Y. S. Tyupkin, Phys. Lett. **59B** (1975) 85.

12) H. L. Störmer, J. P. Eisenstein, A. C. Gossard, W. Wiegmann and K. Baldwin, Phys. Rev. Lett. **56** (1986) 85 は超格子（３次元系）における量子ホール効果の観測を報告している.

13) R. B. Laughlin, Phys. Rev. Lett. **50** (1983) 1395.

14) D. Yoshioka, Phys. Rev. **B29** (1984) 6833.

15) E. Abrahams, P. W. Anderson, D. C. Licciardello and T. V. Ramakrishnan, Phys. Rev. Lett. **42** (1979) 673.

16) H. Aoki and T. Ando, Phys. Rev. Lett. **54** (1985) 831.

17) A. M. M. Pruisken, Phys. Rev. **B32** (1985) 2636.

18) T. Ando, J. Phys. Soc. Jpn. **55** (1986) 3199.

19) H. Aoki and T. Ando, *Proc. Int. Conf. on Application of High Magnetic Fields in Semiconductor Physics,* Würzburg 1986, to be published.

３次元ＱＥＤにおけるトポロジー

北大・理　松　山　豊　樹[*)]

奇数次元時空間上の場の量子論は，時空間の次元数が奇数であるという正にそのことによって，通常の偶数次元時空間上の場の量子論にはなかった新しい理論構造を持ち得る。これは，数学的には，Chern-Simonsの第２特性類と呼ばれる位相的な意味を持つ項，

$$I_{CS}=\mu\int_M tr\left(FA-\frac{1}{3}A^3\right),$$

が（有効）作用の中にゲージ不変性に抵触せずに許されることに依る。ここでAは接続１一形式，Fは曲率２一形式，Mは３次元時空間，μは位相質量を表わす。特に量子電磁力学においては，この項に起源を持つ非自明な位相構造が実際の物理現象として自然界に発現していると考えられる場合がある。こういった理論・実験の両面から，３次元量子電磁力学の位相構造を研究することは非常に意義深いことと思われる。

非可換ゲージ群Gを持つ$M=S^3$上の理論の場合，ゲージ不変性の要請により，もしも$\pi_3(G)\neq 0$ならば位相質量の量子化が起こる。一方，アーベル群$U(1)$を持つ量子電磁力学の場合には$\pi_3(U(1))=0$で

*）昭和62年４月より京都大学基礎物理学研究所

あるため，このような位相量子化は起きない。ところで，Chern-Simons 項は手で作用に付け加えられる他に，フェルミオンとゲージ場の相互作用によってダイナミカルにゲージ場の有効作用に誘起され得る。このとき誘起された Chern-Simons 項の前の係数は，フェルミオン伝搬関数のエネルギー・運動量空間上のある積分で書ける。フェルミオン伝搬関数はエネルギー・運動量空間から行列空間への写像を定義するが，この写像の位相的非自明性が伝導度という物理量に直接反映され非常に興味深い物理現象を引き起こし得る。先に述べた従来の位相量子化は，時空間からゲージ群への写像の非自明性に基づいていたが，これから問題にするのは，エネルギー・運動量空間から伝搬関数の含まれる行列空間への写像の非自明性による位相量子化であり，これは場の量子論における新しい位相量子化の機構を提示している。

ここで扱う理論は，ラグランジアン密度，

$$\mathscr{L}=\mathscr{L}^S(\bar{\phi},\phi,A_\mu)+\mathscr{L}^G(\bar{\phi},\phi,A_\mu,\cdots)$$

で記述される〝一般化された3次元量子電磁力学〞である。$\mathscr{L}^S$ は通常の3次元量子電磁力学のラグランジアン密度で，フェルミオン場 ϕ，ゲージ場 A_μ によって，

$$\mathscr{L}^S=-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}+\bar{\phi}(i\partial\!\!\!/+eA\!\!\!/-m_F)\phi,$$

と書かれる。m_F はフェルミオン場の質量で，3次元時空間での Dirac の γ 行列は $\gamma^0=\sigma^3$，$\gamma^1=i\sigma^1$ $\gamma^2=i\sigma^2$ で与えられる。(σ^i は Pauli 行列) 一方 $\mathscr{L}^G$ は $\mathscr{L}^S$ 以外のほとんど任意の相互作用及び ϕ，A_μ 以外の場の寄与を表わす。〝ほとんど任意〞とは，(1)フェルミオン・カレントの保存則が成立し，(2)フェルミオン場の同時刻反交換関係が満足される限り任意という意味である。通常の相対論的場の量子論では，ローレンツ不変性，くり込み可能性等の基本的要求があるが，もし現象論的理論を考えたいのであれば，それらの要請を破ることも可能で，ここでの議論はそういったより広い意味での3次元量子電磁力学に適用できる。また，現実の物理系を考えたときに，実際の種々の複雑な相互作用及び場を考えなければならない。そういった系のダイナミクスを解くことは非常に困難であるが，時にダイナミクスの詳細によらずに系の位相的構造によって厳密に成立する性質が存在することがあり，それが今回の話の主題となっている。

一般化された3次元量子電磁力学において，Ward-高橋の恒等式が導かれる。Noether カレントは $j^\mu=e\bar{\phi}\gamma^\mu\phi+(\mathit{general})$ で与えられ，保存則 $\partial_\mu j^\mu=0$ を満たす。($\mathit{general}$) は一般化されたセクターからの寄与で高階微分及び場の演算子の高次冪で書かれる。同時刻反交換関係 $\{\phi^\dagger(x),\phi(y)\}\delta(x^0-y^0)=\delta^3(x-y)$ を用いて，Ward-高橋の恒等式，

$$\partial^\mu_x<0|T\{\phi(y)\bar{\phi}(z)\}|0>=-e<0|T\{\phi(y)\bar{\phi}(z)\}|0>\{\delta^3(x-y)-\delta^3(x-z)\}+(\mathit{general})$$

が導かれる。ここで T は時間順序積を示す。この式を Fourier 変換すると，エネルギー・運動量表示の伝搬関数 $S(q)$ 及び頂点関数 $\Lambda(q,p)$ を用いて，$k_\mu\Lambda^\mu(q,p)=S^{-1}(q)-S^{-1}(p)+(\mathit{general})$ を得る。ここで $k=p-q$。この式を k_ρ で微分し $k=0$ とすると，スケール不変性を考慮して，

$$\Lambda_\rho(p) = -\frac{\partial}{\partial p^\rho} S^{-1}(p) \tag{1}$$

を得る。(1)式は，伝導度と位相不変量を結び付ける上で鍵となる関係式である。

次に，これから注目する伝導度という物理量が場の理論でどう導かれるかを見る。外場に対する有効作用$W(A_\mu^{ext})$は径路積分量子化法において

$$exp\left[-W(A_\mu^{ext})\right] = \int [d\bar{\phi}][d\phi][dA_\mu]\cdots exp\left[-\int d^3x \mathscr{L}(\phi, \bar{\phi}, A_\mu, \cdots, A_\mu^{ext})\right]$$

と，ダイナミカルな場を形式的に汎関数積分することにより得られる。外場に対するカレントの線形応答はWのA_μ^{ext}についての２次の項

$$W^{bjli} = \frac{1}{2}\int d^3x d^3y A_\mu^{ext}(x)\,\pi^{\mu\nu}(x-y)\,A_\nu^{ext}(y)$$

から

$$\begin{aligned} J^\mu(x) &\equiv \delta W^{bjli}/\delta A_\mu^{ext}(x) \\ &= \int d^3y \Pi^{\mu\nu}(x-y)\,A_\nu^{ext}(y) \end{aligned}$$

で求まる。ここで$\Pi^{\mu\nu}(x-y)$は真空偏極テンソルである。一様外場（$A_\nu(x) = -x^\rho E$, $other = 0$）の下では，エネルギー・運動量表示の真空偏極テンソル$\pi^{\mu\nu}(p)$を使って，

$$J^\mu(x) = -i\frac{\partial}{\partial p_\mu}\Pi^{\mu\nu}(p)\Big|_{p=0} \equiv \Sigma^{\mu\nu\rho}E$$

となる。$\Sigma^{\mu\nu\rho}$は伝導度テンソルと呼ばれるが，これから問題にする物理量は$\Sigma^{\mu\nu\rho}$の完全反対称部分$\sigma \equiv \frac{1}{3!}\varepsilon_{\mu\nu\rho}\Sigma^{\mu\nu\rho}$である。$\sigma$は零エネルギー・運動量フォトン外線を持つ３点関数に相当し，これをダイアグラム手法で見積もると対称性等を考慮し，Ward-高橋の恒等式(1)を用いて full order で

$$\sigma = \frac{1}{3!}ie^2\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\varepsilon^{\mu\nu\rho}tr\left[\partial_\mu S^{-1}S\partial_\nu S^{-1}S\partial_\rho S^{-1}S\right] \tag{2}$$

となる。このσこそが，３次元量子電磁力学のエネルギー・運動量空間の位相構造を直接に反映する物理量で位相量子化される。

full の伝搬関数$S(p)$はエネルギー・運動量空間R^3から四元数空間Hへの写像を定義する。以下に見るように，式(2)で，$S(p)$を規格化し，被積分関数全体を全微分に書き換え，積分領域をR^3の境界S^2（特異点がある場合にはその点を囲むS^2からの帰与も加わる。）に移すことで，σがある条件下でS^2からS^2への写像のホモトピー類を分類する巻数と関係付けられる。まず，S及びS^{-1}が存在し，$(S^{-1})^\dagger \cdot S^{-1} \equiv C^2$が実数であるとして$h \equiv S^{-1}/C$を定義すると，$h^\dagger h = 1$となり$h$は$SU(2)(=S^3)$の要素になる。このとき$\sigma$は$S$を$h$に置き換えたものになる。$h$は一般に$h = \cos\alpha + i\vec{\sigma}\cdot\vec{n}\sin\alpha$,（$\vec{n}^2 = 1$），と表示でき，これを用いて

$$\sigma = \frac{e^2}{16\pi^3}\int_{S^2} dS_\mu\,\varepsilon^{\mu\nu\rho}\varepsilon_{abc}n^a\partial_\nu n^b\partial_\rho n^c(\alpha - \sin\alpha\cos\alpha)$$

が得られる。さてここで，もしも $\alpha-\sin\alpha\cos\alpha$ が S^2 上で定数 C になるとすると，伝導度は，

$$\sigma=\frac{e^2}{2\pi}C\frac{1}{8\pi}\int_{S^2}dS_\mu\varepsilon^{\mu\nu\rho}\varepsilon_{abc}n^a\partial_\nu n^b\partial_\rho n^c,$$

となるが，注目すべきは，

$$\frac{1}{8\pi}\int_{S^2}dS_\mu\varepsilon^{\mu\nu\rho}\varepsilon_{abc}n^a\partial_\nu n^b\partial_\rho n^c$$

は Kroneckar 指数と呼ばれるホモトピー類 $\Pi_2(S^2)$ を分類する位相不変量で厳密に整数値を取る。従って伝導度は，$\sigma=\frac{e^2}{2\pi}Cn$ となり，必ず $\frac{e^2}{2\pi}C$ の整数倍の値を取る。すなわち，伝導度の位相量子化が起きる。加えてローレンツ不変な理論の場合，S^2 上の full 伝搬関数の漸近的なふるまいが Dirac 的ならば $C=\frac{2m+1}{2}$，Schrödinger 的ならば $C=m$，（m は整数）という結果が得られる。

ここで述べられた位相量子化の機構は，我々（石川健三氏との共同研究）の量子ホール効果への場の量子論的アプローチにおいて，本質的な役割をする。そこでは，多成分量子電磁力学（multi-component QED_3）の持つ位相構造が量子ホール効果として現実の巨視的な系に発現している。

詳細は以下の文献を参照して下さい。

文　献

1. T. Matusyama, Hokkaido Univ. preprint EPHOU86 SEP013 (to be published in Prog. Theor. Phys.).

量子ホール効果についての我々の仕事では

2. K. Ishikawa and T. Matsuyama, Nucl. Phys. **B180** [FS18], 523 (1987).
3. K. Ishikawa and T. Matsuyama, EPHOU85 SEP014.
4. K. Ishikawa and T. Matsuyama, Z. Phys. **C33**, 44 (1986).
5. 当研究会の石川氏の報告.

4次元Quantum Electrodynamics と量子ホール効果

北大・理　石川健三，松山豊樹*

2次元電子系を実現する半導体である Si-MOSFET とか GaAs-GaAlAs ヘテロ接合で観測されている（整数）量子ホール効果ではホール伝導度 σ_{xy} が

*) 4月より京大基研。